Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______/В. М. Левчук
«19» 06 2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОРОЖДАЮЩИЕ ГРАФЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор _______/Я.Н. Нужин
19.06.2019

Выпускник _______/К.А. Мельникова
19.06.2019

Красноярск 2019

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Порождающие графы конечных групп» содержит 13 страниц текста, 5 использованных источника.

ГРУППА, ПОДГРУППА, КОНЕЧНАЯ ГРУППА, РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА, НОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА, МИНИМАЛЬНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА, ЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА, ФАКТОР-ГРУППА, ГРАФ, ПОРОЖДАЮЩИЙ ГРАФ, ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ.

Цель работы — оформление более подробного доказательства теоремы 1, чем в статье [1], опираясь на хорошо известные результаты теории конечных групп.

В результате исследований доказана теорема 1 и получено подробное доказательство теоремы 1.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается гипотеза о порождающих графах.

Определение 1. Граф $\Gamma(G)$, у которого множество вершин есть неединичные элементы конечной группы G, а две вершины смежны, тогда и только тогда, когда два соответствующие этим вершинам элемента порождают группу G, называется *порождающим графом.*

Проиллюстрируем определение 1 на следующих двух примерах.

Пусть G — циклическая группа порядка n, порожденная элементом g. Следующие включения и равенства показывают, что порождающий граф данной циклической группы G обладает гамильтоновым циклом, см.рисунок 1.

$$< g, g^2 >\ni g^{-1}g^2 = g,$$

$$< g^2, g^3 >\ni g^{-2}g^3 = g.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

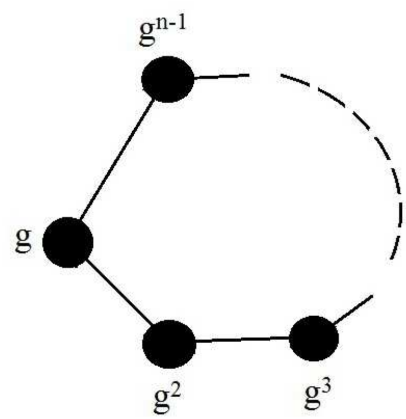

Рисунок 1 — Граф G

На рисунке 2 изображен порождающий граф симметрической группы S_3, где

$$S_3 = \{1, a, a^2, b, ab, ba\}, \quad |a| = 3, |b| = 2,$$

$$S_3 =< a > \leftthreetimes < b >$$

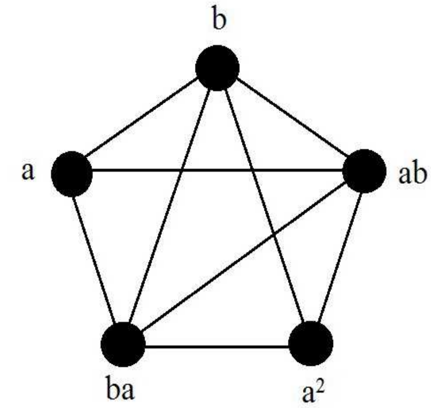

Рисунок 2 — Граф S_3

В работе [1] (T.Breuer, R.M.Guralnik, A.Lucchini, A.Maroti and G.P.Nagy. (Hamiltonian cycles in the generating graphs of finite groups // Bull. London Math. Soc. 2010.) доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть G — конечная разрешимая группа порядка больше трех. Тогда граф $\Gamma(G)$ гамильтонов в том и только в том случае, когда фактор-группа G/N циклическая для любой нетривиальной нормальной подгруппы N группы G. $(N \neq 1, N \neq G)$.*

Теорема 2. *Для каждой конечной простой группы G достаточно большого порядка, граф $\Gamma(G)$ содержит гамильтонов цикл.*

Теорема 3. *Для каждой симметрической группы S_n при достаточно большом n, граф $\Gamma(S_n)$ содержит гамильтонов цикл.*

Основываясь на этих результатах, авторы статьи [1] выдвигают следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Пусть G — конечная группа порядка больше трех. Тогда граф $\Gamma(G)$ гамильтонов в том и только в том случае, когда фактор-группа G/N циклическая для любой нетривиальной нормальной подгруппы N группы G. $(N \neq 1, N \neq G)$.*

Заметим, что гипотеза 1 отличается от теоремы 1 только тем, что конечная группа G не обязана быть разрешимой.

В работе [2] (F. Erdem,On the generating graphs of symmetric group J.Group Theory. 2018.) указана точная оценка на порядок группы G, а именно, доказано, что для знакопеременной группы A_n и симметрической группы S_n подтверждена гипотеза 1 при $n \leq 107$.

Цель работы — оформление более подробного доказательства теоремы 1, чем в статье [1], опираясь на хорошо известные результаты теории конечных групп.

1 Определения и вспомогательные результаты

Далее под словом граф понимается *простой граф*, то есть граф без кратных рёбер и петель.

Определение 2. Граф $\Gamma(G)$ у которого множество вершин есть неединичные элементы конечной группы G, а две вершины смежны, тогда и только тогда, когда два соответствующие этим вершинам элемента порождают группу G, называется *порождающим графом.*

Определение 3. Для произвольной группы G, порожденной множеством M принято обозначение $G =< M >$.

Определение 4. Мультипликативная группа G называется *циклической*, если в ней имеется такой элемент a, что каждый элемент $b \in G$ является степенью элемента a, то есть существует целое число k, такое, что $b = a^k$. Этот элемент a называется *образующим* группы G.

Определение 5. Подгруппа H группы G называется *нормальной подгруппой* этой группы, если $ghg^{-1} \in H$ для всех $g \in G$ и $h \in H$.

Определение 6. *Минимальная нормальная* подгруппа группы G — это минимальная по включению собственная подгруппа этой группы, то есть отличная от 1 и от G.

Определение 7. Группа G ряд коммутантов которой заканчивается на тривиальной группе называется *разрешимой группой.*

Определение 8. Матричная группа G, то есть подгруппа группы $GL_n(K)$ над некоторым полем K, называется *неприводимой*, если не существует нетривиального G-инвариантного подпространства пространства вектор-столбцов K^n.

Определение 9. Будем говорить, что группа G *действует на множестве* X, если выполняются следующие три условия:

1) для любых $g \in G$ и $x \in X$ однозначно определен элемент $gx \in X$;

2) $ex = x$, если e — единица группы G;

3) $(gh)x = g(hx)$ для любых $g, h \in G$ и $x \in X$.

Таким образом, задано однозначное отображение $G \times X \to X$ с условиями 2), 3). Из условий 2), 3) вытекает свойство

4) $x_2 = gx_1 \Rightarrow x_1 = g^{-1}x_2$ для любых $g \in G$ и $x_1, x_2 \in X$.

Лемма 1. *Пусть группа G действует на множестве X. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) для любых различных f и g из G существует $x \in X$ такой, что $gx \neq fx$; 2) $Ker\varphi = 1$, то есть G является подгруппой группы S_X.*

Определение 10. Говорят, что группа G действует *точно* на множестве X, если выполняется одно из двух эквивалентных условий леммы 1. Очевидно, если группа действует точно на конечном множестве, то она конечна.

Определение 11. *Центром группы G* называется множество элементов, которые перестановочны с каждым ее элементом.

В работе центр группы G обозначается через $Z(G)$.

Лемма 2 (Условие гамильтоновости Поса)**.** *Пусть G — граф на n вершинах и $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ — степени его вершин. Если $d_k \geq k+1$ для всех положительных $k < \frac{n}{2}$, то G содержит гамильтонов цикл.*

Частным случаем условия гамильтоновости Поса является следующая лемма

Лемма 3. *Граф гамильтонов, если степень любой вершины больше, либо равна $n/2$, где n – число вершин исходного графа.*

Лемма 4 (Шура-Цассенхауза)**.** *Если G — конечная группа, а M — её нормальная подгруппа, порядок которой взаимно прост с порядком факторгруппы G/N, то G является полупрямым произведением (или в другой терминологии расщепляемым расширением) подгруппы M и факторгруппы G/M и все дополнения к подгруппе M сопряжены в группе G.*

2 Подтверждения гипотезы 1 для разрешимых групп

В этом параграфе приводится модификация доказательство теоремы 1 из работы [1].

Теорема 1. *Пусть G — конечная разрешимая группа порядка больше трех. Тогда граф $\Gamma(G)$ — гамильтонов в том и только в том случае, когда фактор-группа G/N циклическая для любой нетривиальной нормальной подгруппы N группы G. ($N \neq 1, N \neq G$).*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Gamma(G)$ содержит гамильтонов цикл. Если $1 \neq n \in N$ то существует $g \in G$ такое, что $< n, g >= G$, отсюда

$$G/N =< nN, gN >=< gN > .$$

Таким образом, фактор-группа G/N циклическая, см. рисунок 3.

Рисунок 3 — Фрагмент цикла

Достаточность. Пусть G — конечная разрешимая группа и G/N — циклическая для любой неединичной нормальной подгруппы N в G. Если G — циклическая группа порядка n, то любой порождающий элемент g, принадлежащий G, соединяется с каждой вершиной $\Gamma(G)$ и вершины $(g^1, g^2, \ldots, g^{n-1})$ определяют гамильтонов цикл в $\Gamma(G)$. Далее мы считаем, что G отлична от циклической группы и доказательство разбивается на два случая.

1) Группа G имеет две (или более) различные минимальные собственные нормальные подгруппы.

2) В группе G единственная минимальная собственная нормальная подгруппа.

1) Пусть G не является циклической группой и G имеет две различные ми-

нимальные нормальные подгруппы A и B. В силу разрешимости группы G,

$$A = Cp_1 \times \ldots \times Cp_1,$$

$$B = Cp_2 \times \ldots \times Cp_2,$$

где p_1, p_2 — не обязательно различные простые числа. Здесь и далее через C с индексом n обозначается циклическая группа порядка n.

Очевидно, в силу минимальности нормальных подгрупп A и B.

$$A \cap B = 1.$$

Покажем, что отображение $\varphi : g \to (gA, gB)$ является вложение в группу

$$G/A \times G/B = \{(g_1A, g_2B), g_1, g_2 \in G\}$$

Действительно. Пусть $(g_1A, g_1B) = (g_2A, g_2B)$, тогда

$$g_1A = g_2A,$$

$$g_1B = g_2B.$$

Отсюда

$$g_1^{-1}g_2 \in A,$$

$$g_1^{-1}g_2 \in B.$$

Таким образом, $g_1^{-1}g_2 \in A \cap B$ и, следовательно, $g_1^{-1}g_2 = 1$, то есть $g_2 = g_1$. Итак, отображение φ является инъекцией. Покажем, что это отображение сохраняет операцию.

$$\varphi(fg) = (fgA, fgB),$$

$$\varphi(f)\varphi(g) = (fA, fB)(gA, gB) = ((fA)(gA), (fB)(gB)) = (fgA, fgB).$$

Из полученного изоморфного вложения и предположения, что G не является циклической группой, следует, что G — прямое произведение двух циклических групп одинакового простого порядка, то есть

$$G = Cp \times Cp.$$

Действительно, мы показали, что $G \simeq C = G/A \times G/B = C_n \times C_m$.

$$C_n = C_{n_1^{i_1}} \times \ldots \times C_{n_s^{i_s}}$$

$$C_m = C_{m_1^{j_1}} \times \ldots \times C_{m_l^{i_l}}$$

$$n_i, m_j \text{ — простые.}$$

Если все n_i, m_j, различны, то G— циклическая, что невозможно в силу предположения. Следовательно, существует i, j, такие, что $n_i = n_j$. Но, тогда, либо в G найдется нормальная подгруппа N такая, что G/N не является циклической, либо

$$s = l = 1 = i_f = j_f,$$

$$n_f = m_f = p,$$

где p — простое число, и, следовательно, $G = Cp \times Cp$.

Возьмем произвольный нееденичный элемент $g \in G$. Тогда порядок группы $< g >$ равен p. Очевидно, если $f \in < g >$, то вершины f и g не соединяются ребром. Если $f \notin < g >$, то порядок группы $< f, g >$ больше p и, следовательно, $|< f, g >| = p^2$. Таким образом, f и g смежные вершины. Следовательно, для такой группы G каждая вершина графа $\Gamma(G)$ имеет степень $p^2 - p$ и поэтому $\Gamma(G)$ содержит гамильтоновым циклом по лемме 2. Действительно, проверим выполнимость условия леммы 2. В условиях леммы 2 $n = p^2 - 1$. Тогда достаточным условием существования гамильтонова цикла является неравенство

$$p^2 - p \geq \frac{p^2 - 1}{2},$$

которое, очевидно, выполняется для любого простого p.

2) Пусть G — разрешимая не циклическая группа, M — её минимальная (не тривиальная) единственная нормальная подгруппа. Так как группа G разреши-

ма, то

$$M = C_p \times \ldots \times C_p.$$

Поскольку фактор-группа G/M циклическая, то существует такой элемент $g \in G$ и натуральное число $n = |G/M|$, что

$$G/M = \{gM, g^2M, \ldots, g^nM = M\}$$

и

$$G =< M, g > .$$

Группа G действует сопряжением на M. Это действие индуцирует действие фактор-группы G/M на M. Пусть

$$n = p^s l, \text{ где} (p, l) = 1, \quad s \geq 1, \quad l \geq 1, \quad g^n \in M.$$

Отсюда

$$|g| = p^u l, \ u \geq s.$$

(Заметим, что при $l = 1$ сразу получаем, цикличность группы G, и это противоречит предположению.)

Предположим, что действие фактор-группы G/M на M не является точным. Тогда существует такое натуральное число t, что $g^t \notin M$ и $g^{-t}mg^t = m$, для любого $m \in M$. Значит, $< g^t, M >$— абелева подгруппа и следовательно, $g^t \in Z(G)$. Более того, $(|g^t|, q) = 1$, для любого простого числа q отличного от p. Иначе в G есть минимальная нормальная подгруппа порядка q, что невозможно в силу единственности минимальной нормальной подгруппы в группе G. Таким образом $|g^t| = p^v, \ v \geq 1$, и поэтому $< (g^t)^{v-1} >$ — минимальная нормальная подгруппа порядка p. Следовательно, она равна M и G — циклическая группа. Противоречие.

Таким образом, мы установили, что фактор-группа действует точно на линейном пространстве размерности k над полем $\mathbb{Z}_p$. Это означает, что G/M — подгруппа в

$$\mathrm{Aut}(Z_p \times \ldots \times Z_p) = GL_k(P).$$

Если $k = 1$, то $(|M|, |G|/|M|) = 1$, так как $|\operatorname{Aut}(Z_p)| = p - 1$. Пусть $k \geq 2$, тогда G/M неприводимая подгруппа, так как в противном случае получаем противоречие с минимальностью M. Предположим, что p делит $|G/M|$. Тогда G/M лежит в некоторой параболической подгруппе группы $GL_k(p)$, поскольку она является p — локальной, то есть лежит в нормализаторе некоторой p — подгруппы. Все собственные параболические подгруппы приводимы. Поэтому G/M приводимая подгруппа. Противоречие.

Таким образом, мы установили равенство $(|M|, |G|/|M|) = 1$. В силу леммы 4 из этого равенства следует, что G является расщипимым расширением с помощью $H = G/M$, и все дополнения к подгруппе M сопряжены в группе G.

Итак, $G = M \leftthreetimes H$. Положим $m = |M|$ и пусть $H_1, \ldots, H_m$ — различные сопряженные с H подгруппы в G. Заметим, что $m \geq 3$. Так как, если $m = 2$, то группа G обязана быть циклической, а это противоречит нашему предположению. Для любого i, $1 \leq i \leq k$ циклическая подгруппа H_i является максимальной в группе G.

Положим $n = |H|$ и пусть h — порождающий элемент подгруппы H_m. Для любого k, $1 \leq k \leq m$, пусть v_k — единственный элемент из M с условием

$$v_k^{-1} H_m v_k = H_k.$$

Пусть j — произвольное натуральное число с условием $1 \leq j \leq m \cdot n$. Если j кратно n, то положим

$$g_j = v_k, \quad \text{где} \quad k \equiv j (\operatorname{mod} m).$$

В противном случае, если j не является кратным n, положим

$$g_j = v_k^{-1} h^i m v_k, \quad \text{где} \quad i \equiv j (\operatorname{mod} n), \quad k \equiv j (\operatorname{mod} m).$$

Тогда g_{mn} является единичным элементом группы G, а $g_1, \ldots, g_{mn-1}$ являются неединичные элементами этой группы.

Мы утверждаем, что последовательность вершин $g_1, \ldots, g_{mn-1}, g_1$ и определяют гамильтонов цикл графа $\Gamma(G)$. Действительно, пусть x и y являются соседними элементами этой последовательности. Положим

$$L =< x, y > .$$

По построению подгруппа L проецируется на G/M при естественном гомоморфизме группы G на G/M. Но L не сопряжена с H_1. Отсюда получаем, что L не может содержаться в максимальной подгруппе, содержащей M. (Вида $M \rtimes K$, где K максимальная подгруппа из H) и L не может лежать в любом дополнении подгруппы M группы G. Так как G является аффинной примитивной группой и $(|M|, |H|) = 1$, то по лемме 4, L не содержится ни в одной максимальной подгруппе группы G и, следовательно, $L = G$.

Теорема доказана. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведено более подробное доказательство теоремы 1, чем в статье [1]. В выкладках используются известные результаты теории конечных групп. Отметим, также, что в доказательстве в отличии от статьи [1] используется не условие Поса (лемма 2), а более простое и более слабое утверждение о существование гамильтонова цикла в графе (лемма 3).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. T.Breuer, R.M.Guralnik, A.Lucchini, A.Maroti and G.P.Nagy, Hamiltonian cycles in the generating graphs of finite groups, Bull. London Math. Soc. , (2010), 621–633.

2. Fuat Erdem, On the generating graphs of symmetric group, J.Group Theory, 2018.– 629–649.

3. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson , Atlas of Finite Groups, University Press, Oxford, 1985.

4. Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю.И. Основы теории групп.– Наука, 1982.– 288 с.

5. Лидл, Р., Нидеррайтер, Г. Конечные поля - Мир, 1988.– 430 с.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
______/В. М. Левчук
«19» 06 2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОРОЖДАЮЩИЕ ГРАФЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ______/Я.Н. Нужин
19.06.2019

Выпускник ______/К.А. Мельникова
19.06.2019

Красноярск 2019